

Uma Proposta de Solução para o Problema Não Linear de Fluxo Multiproduto Utilizando Pontos Interiores

SILVANA BOCANEGRA
MARCOS AUGUSTO DOS SANTOS
FREDERICO FERREIRA CAMPOS, FILHO

UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais
DCC - Departamento de Ciência da Computação
Cx Postal 702 - CEP 30123-970 Belo Horizonte (MG)
silvana@dcc.ufmg.br
marcos@dcc.ufmg.br
ffcampos@dcc.ufmg.br

Resumo. A proposta deste trabalho consiste em implementar um algoritmo para resolver o problema não linear de fluxo multiproduto, utilizando planos de corte e centros analíticos. O problema original é relaxado utilizando a função lagrangeana parcial, construída a partir de hiperplanos de suporte. Resolve-se o problema dual, a cada iteração acrescenta-se um hiperplano de suporte para modelar a função lagrangeana e um limite superior do valor da função ótima é monotonicamente acrescido. Desta forma, este algoritmo se destaca por gerar uma seqüência monótona estritamente crescente de cotas para alcançar a solução, e conseqüentemente segue trajetórias centrais associadas ao máximo da função modelo. A experiência numérica do algoritmo será realizada com problemas clássicos da literatura e também com problemas obtidos utilizando um gerador. Espera-se aplicar o método a um problema relacionado com redes de satélites para telecomunicação.

Palavras-Chave: Pontos interiores, relaxação lagrangeana, planos de corte, centros analíticos.

1 Introdução

Os problemas de fluxo multiprodutos estão sendo relatados na literatura desde a década de 60 com a publicação de alguns trabalhos [FF62, Hu63], dentre outros. Eles estão presentes em uma grande variedade de aplicações, com ênfase em redes de transporte e de telecomunicação. Estes problemas surgem quando muitos produtos compartilham arcos em uma rede e competem pela capacidade destes arcos. Eles consistem em determinar o custo mínimo do fluxo de produtos em uma rede sujeita a restrições de capacidade e conservação. Em geral, apresentam grande número de variáveis e restrições e devem ser tratados de forma específica, utilizando por exemplo, técnicas de decomposição.

O princípio da decomposição de Dantzig-Wolfe [DW60] deu origem a uma classe de algoritmos, nos quais foram depositadas esperanças de resolver eficientemente problemas de grande porte. Infelizmente as esperanças não se confirmaram; em algumas instâncias ou formulações o método apresenta convergência lenta. O ganho obtido com o trabalho em subproblemas menores, oriun-

dos da decomposição, é perdido com o elevado número de iterações entre o problema mestre e as partes.

O uso de Algoritmos de Pontos Interiores, uma classe de métodos desenvolvida a partir do trabalho de Karmarkar [Kar84], tem apresentado avanços substanciais para resolver problemas de grande porte [Zha96]. Alguns autores [KN91, Her92] conjecturam que o uso de pontos interiores para resolver, ou o problema mestre, ou os subproblemas originados da decomposição, possa dar nova vida aos métodos tradicionais.

O objetivo deste trabalho é implementar um novo algoritmo de pontos interiores, baseado no método proposto por Oliveira e Santos [OS], para resolver o problema não linear de fluxo multiproduto. As principais características do algoritmo são a estabilidade e o uso parcial do método de centros analíticos na resolução do problema mestre, originado da aplicação do princípio da decomposição. Pretende-se desenvolver um protótipo com modularização adequada, que permita o ensaio de idéias novas, como o impacto da desagregação, obtido pela utilização de múltiplos cortes, na velocidade de convergência do método.

2 O Problema Não Linear do Fluxo Multiproduto

Seja $G(V, E)$ um grafo não direcionado associado a uma rede, com m nós e n arcos. Os nós representam centros de oferta(demanda), ou simplesmente conectores; os arcos são as ligações entre os pares de nós, por onde trafegam os produtos.

O problema não linear de fluxo multiproduto, pode ser formulado como:

$$\text{Min} \sum_{i \in I} c^i x^i + \sum_{e \in E'} f_e(y_e) \quad (1)$$

$$\text{sa} : \sum_{i \in I} x^i \leq y_e, \quad \forall e \in E' \subset E \quad (2)$$

$$F^i = \{x^i \geq 0 \mid Ax^i \leq b^i, \quad \forall i \in I\} \quad (3)$$

$$0 \leq y_e \leq \gamma_e, \quad \forall e \in E' \subset E \quad (4)$$

onde:

$c^i = (c_e^i)_{e \in E}$: vetor de custos do produto i ;

$x^i = (x_e^i)_{e \in E}$: vetor de fluxos do produto i ;

$A_{m \times n}$: matriz de incidência do grafo G ;

I : conjunto dos produtos i ;

$b^i = (b_s^i)_{s \in V}$: vetor de ofertas/demandas de cada produto;

$y = (y_e)_{e \in E'}$: vetor de limites superiores de fluxo total dos arcos;

$E' \subset E$: conjunto de arcos onde existe um limite de capacidade de fluxo total e/ou um custo não linear.

As restrições (3) e (4) são clássicas de problemas de redes e restrições de capacidade, respectivamente. As restrições (2), são chamadas restrições de acoplamento, no sentido que, quando relaxadas, fluxos individuais independentes podem ser resolvidos separadamente.

As funções $f_e(y_e)$ são associadas ao fluxo de cada arco na rede. As mais usadas na prática são:

- a função "power",

$$f_e(y_e) = \alpha_e (y_e)^{\beta_e}, \quad \alpha_e > 0 \text{ e } \beta_e \geq 1 \quad (5)$$

- a função "delay" Kleinrock,

$$f_e(y_e) = \frac{y_e}{\gamma_e - y_e}. \quad (6)$$

Estas funções controlam a distribuição de fluxo nos arcos, afim de não congestionar a rede. Note que $f_e \equiv 0$ corresponde ao problema linear de fluxo multiproduto.

3 Relaxação Lagrangeana

Quando os problemas de fluxo multiproduto são formulados matematicamente, eles apresentam a matriz de restrições com uma estrutura bloco angular, na qual podem ser aplicadas técnicas de decomposição, tal como a relaxação lagrangeana, que têm como princípio reduzir o problema a subproblemas menores.

A função lagrangeana parcial é construída associando às restrições de acoplamento os multiplicadores de Lagrange $v = (v_e)_{e \in E'}$.

$$L(x, y, v) = \sum_{i \in I} c^i x^i + \sum_{e \in E'} f_e(y_e) + \sum_{e \in E'} v_e \left(\sum_{i \in I} x_e^i - y_e \right) \quad (7)$$

onde os multiplicadores de Lagrange representam os preços das restrições de acoplamento, ou seja, o preço que está sendo pago por não atender estas restrições. Assumindo que $f_e(y_e)$ é convexa e os custos c^i são não negativos, fica garantido que os multiplicadores de Lagrange serão todos não negativos.

O problema dual associado ao problema não linear de fluxo multiproduto, será:

$$\max_{v \geq 0} L^D(v) \quad (8)$$

onde:

$$L^D(v) := \min_{\substack{x^i \in F^i \\ 0 \leq y \leq \gamma}} L(x, y, v)$$

Após alguns cálculos [GGSV94], pode-se escrever $L^D(v)$ da seguinte forma:

$$L^D(v) = \sum_{i \in I} L^i(v) + \sum_{e \in E'} L^e(v)$$

onde:

$$L^i(v) = \min_{x^i \in F^i} (c^i + v)^T x^i; \quad (9)$$

$$L^e(v) = \min_{0 \leq y \leq \gamma} (f_e(y_e) - v_e y_e) \quad (10)$$

Estas funções são os subproblemas e podem ser facilmente calculadas; (9) é obtido pela solução do problema de caminho mínimo com custos $(c_i + v)$ não negativos e (10) é uma função unidimensional convexa, a qual pode ser resolvida analiticamente.

Pelo teorema da dualidade fraca [BJS90], o valor da solução ótima do problema dual (8) é igual o valor da solução ótima do problema primal.

4 Método Padrão de Planos de Corte

Existem muitos métodos para resolver problemas não diferenciáveis, mas poucos têm sido aplicados no contexto de problemas de fluxo multiprodutos. Um deles é o método dos planos de corte. Este método utiliza o subgradiente para construir uma aproximação em um ponto de uma função convexa não linear por uma função linear.

Seja f uma função convexa não necessariamente diferenciável em R^n e x um ponto interior no domínio de f . O conjunto subdiferencial $\partial f(x)$ de f em x , é definido por:

$$\partial f(x) = \{\xi \in R^n \mid f(y) \geq f(x) + \xi^T(y - x)\}$$

qualquer que seja y no domínio de f . Este conjunto substitui o gradiente para funções não diferenciáveis.

Considere o problema (8) a ser resolvido, e assuma $v \in R^n$:

Como L^D é uma função côncava, $-L^D$ é convexa e para cada $\xi \in -\partial(-L^D(\bar{v}))$, tem-se que

$$L^D(v) \leq L^D(\bar{v}) + \xi(v - \bar{v})$$

é válida para todo par (v, \bar{v}) pertencente ao domínio de L^D .

Os métodos de plano de corte são baseados em progressivos refinamentos de aproximações poliedrais do epigrafo de $L^D(v)$. Seja $\{v_k\}$, $k = 1, 2, \dots, \kappa$ uma sequência de pontos no domínio de L^D . A cada ponto é calculado $L^D(v_k)$ e um subgradiente,

$$\xi_k \in -\partial(-L^D(\bar{v}_\kappa)).$$

Estes resultados são obtidos por chamadas ao oráculo. Os subgradientes são produtos diretos da otimização de (9) e (10). Sejam $x(\bar{v})$ e $y(\bar{v})$ soluções ótimas dos problemas (9) e (10), respectivamente. Um subgradiente para $L^D(v)$ em $v = \bar{v}$ é dado por: (ver [Min83])

$$\xi_e = \sum_{i \in I} x_e^i(\bar{v}) - y_e(\bar{v}).$$

A aproximação poliedral do epigrafo de $-L^D$, por um modelo de planos de corte é definida por:

$$\tilde{L}^D(v) = \min (L^D(\bar{v}) + \xi(v - v_k), \quad k = 1, 2, \dots, \kappa)$$

Define-se por relaxação poliedral do epigrafo de $-L^D$, o conjunto de pares $(-z, v)$ satisfazendo

$$z \leq L^D(v_k) + \xi_k^T(v - v_k), \quad k = 1, 2, \dots, \kappa$$

Portanto,

$$\max \{z \mid z - \xi_k^T v \leq L^D(v_k) - \xi_k^T(v_k), \quad k = 1, 2, \dots, \kappa\} \quad (11)$$

é uma relaxação poliedral de (8).

O método de plano de corte padrão define o próximo ponto $v_{\kappa+1}$ a ser computado, conhecido por ponto de Dantzig Wolfe, como o máximo de (11). A cada iteração é calculado v_κ , $L^D(v_\kappa)$ e $\xi^\kappa \in -\partial(-L^D(\bar{v}_\kappa))$. Enquanto $L^D(v_{\kappa+1}) - L^D(v_\kappa) \geq \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$, κ é substituído por $\kappa + 1$, acrescenta-se um novo corte e novamente é resolvido o problema relaxado (11). Este método pode ter convergência lenta, pois privilegia certas formas lineares.

5 Método de Planos de Cortes utilizando Centros Analíticos (MPCCA)

Vários algoritmos, para resolver problemas de otimização, utilizam em cada iteração um ponto considerado como centro, ou no sentido geométrico ou no sentido analítico. Em geral, os métodos baseados na noção de centro realizam um corte em uma região convexa, limitada e que contenha solução ótima. Cada corte utiliza um hiperplano, que separa esta região em duas partes. Na parte onde a solução do problema está contida são realizadas operações, de acordo com o método que está sendo utilizado, para determinar o próximo centro. A velocidade e a convergência do método depende do processo adotado para determinar o centro.

O centro analítico é o único máximo de uma função distância. Para determiná-lo é necessário definir uma região compacta e uma função distância associada a esta região.

Seja

$$S^\kappa = S \cap \{(z, v) \in R^{n+1} \mid z \geq \rho^k \text{ e } z - \xi_k^T v \leq d_k, \quad k = 1, 2, \dots, \kappa\}$$

um conjunto compacto, onde:

$$S = \{v \in R^n \mid 0 \leq v_k \leq m_k, \quad k = 1, 2, \dots, n\},$$

com m_k menor que uma constante arbitrária;

$$\rho^\kappa < \max_{0 \leq k \leq \kappa} L^D(v_k) \quad \text{e}$$

$$d_k = L^D(v_k) - \xi_k^T(v_k).$$

Uma função distância associada a S^κ , conhecida como função barreira logarítmica é definida por:

$$f_\rho^\kappa(z, v) := -q \ln(z - \rho_\kappa) + \sum_{i=1}^{\kappa} \ln(\xi_k^T v - z + d_k) - f_S, \quad (12)$$

sendo, $q \geq \kappa + 1$ um inteiro positivo,

$$f_S = \sum_{i=1}^{\kappa} \ln(m_k - e_k v_k) + \sum_{i=1}^{\kappa} \ln(e_k v_k)$$

a função barreira associada a S e e_k vetor canônico.

O método de plano de corte utilizando centros analíticos substitui a equação (11) por:

$$\max z : (z, v) \in S^\kappa \quad (13)$$

e associa a ela a seguinte família de problemas não lineares, dada por:

$$\min f_\rho^\kappa(z, v) : (z, v) \in \text{int}(S_\rho^\kappa)$$

onde:

$$S_\rho^\kappa = \{(z, v) \in S^\kappa \mid \underbrace{z \geq \rho^\kappa, \dots, z \geq \rho^\kappa}_{q \text{ vezes}}\}$$

$$k = 1, 2, \dots, \kappa; q \geq \kappa + 1\}, \text{sendo}$$

ρ^κ um limitante inferior para o valor ótimo de (13).

O centro analítico de S_ρ^κ é definido por:

$$(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa := \arg \min \{f_\rho^\kappa(z, v) : (z, v) \in \text{int}(S_\rho^\kappa)\}.$$

A curva contínua que une os pontos $(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa$ é conhecida como trajetória central. O centro analítico pode ser interpretado geometricamente como o ponto que maximiza o produto das distâncias de todas as faces de S_ρ^κ .

Para encontrar um ponto na vizinhança de $(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa$, que é o centro analítico da região atual, será utilizado o Método de Newton. A direção de Newton d_i é obtida pela solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$H_\rho^\kappa(z, v)^i d_i = -\nabla f_\rho^\kappa(z, v)^i. \quad (14)$$

onde $\nabla f_\rho^\kappa(z, v)^i$ e $H_\rho^\kappa(z, v)^i$ são denominados vetor gradiente e matriz hessiana.

Como pode ser visto é impossível computar $(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa$ exatamente, logo torná-se necessário estabelecer um critério para determinar quando um ponto $(z, v)^i$ está próximo do centro analítico $(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa$. Nós utilizaremos o seguinte critério de proximidade (Den Hertog, Ross e Terlaky [dHRT91]):

Sejam $(z, v)^i \in S_\rho^\kappa$ e $H_\rho^\kappa(z, v)^i$ definida positiva. A norma induzida por H é definida por:

$$\|(z, v)^i\|_H = \sqrt{(z, v)^i T H(z, v)^i};$$

para $(z, v)^i \in R^{n+1}$.

A proximidade de $(z, v)^i$ a $(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa$ é definida pela norma induzida da direção de Newton, dada por:

$$\delta_\rho^\kappa(z, v)^i = \|(H_\rho^\kappa(z, v)^i)^{-1} \nabla f_\rho^\kappa(z, v)^i\|_H = \|-d_i\|,$$

então se $\delta_\rho^\kappa(z, v)^i < \epsilon$, para algum $\epsilon \in [0, 1]$, o ponto $(z, v)^i$ pode ser considerado próximo a $(\bar{z}, \bar{v})_\rho^\kappa$. Caso contrário calcula-se $(z, v)^{i+1} = ((z, v)^i + d_i)$ e novamente resolve-se o sistema (14) para determinar d_{i+1} .

A cada iteração, encontra-se o centro analítico da região atual e o limitante inferior ρ é acrescido. As q restrições relacionadas a função objetivo são removidas e outras q restrições, associadas ao novo limitante, são incorporadas, definindo uma nova região. Este procedimento é repetido até que seja alcançado um ponto próximo a trajetória central e suficientemente perto da solução ótima.

Como pode ser observado, a cada iteração do MPC-CA, será necessário a resolução de muitos sistemas de equações lineares e isto influenciará diretamente na velocidade de convergência do algoritmo. Estamos fazendo um estudo comparativo dos métodos existentes para solução destes sistemas afim de encontrar o que melhor se enquadra na solução do problema.

6 Conclusões

O algoritmo MPCCA se destaca por utilizar o método parcial dos centros analíticos, em um contexto de planos de corte, para resolver o problema mestre, originado da decomposição. Dada uma região convexa que contém pelo menos uma solução do problema, a estabilidade é alcançada utilizando pontos próximos a trajetória central de um politopo que é construído a partir do politopo original e de cortes gerados por subgradientes; desta forma, existe uma sequência monótona estritamente crescente para monitorar o desenvolvimento das iterações. Em [GGSV94] o método de planos de corte e centros analíticos é utilizado sem seguir o conceito de trajetórias centrais, não garantindo desta maneira uma sequência monótona de cotas para alcançar a solução.

O algoritmo será implementado em MATLAB. Para verificar a confiabilidade do *software* serão realizados testes com os problemas NDO22 [GB84], problemas obtidos utilizando um gerador e possivelmente com um problema relacionado a redes de satélites para telecomunicação. Os resultados serão comparados com os obtidos em outros métodos [GGSV94, FPL93, JLFP93].

Referências

- [BJS90] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley and Sons, second edition, 1990.
- [dHRT91] D. den Hertog, C. Roos, and T. Terlaky. A potential reduction variant of renegar's short-step path-following method for linear programming. *Linear Algebra and its Applications*, 152:43–68, 1991.
- [DW60] G. B. Dantzig and P. Wolfe. The decomposition algorithm for linear programs. *Operations Research*, 8:101–111, 1960.

- [FF62] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Flows in networks. Technical report, Princeton University Press, 1962.
- [FPL93] J. M. Farvolden, W. B. Powell, and I. J. Lustig. A primal partitioning solution for the arch-chain formulation of a commodity network flow problem. *Operations Research*, 41:669–703, 1993.
- [GB84] E. M. Gafani and D. P. Bertsekas. Two-metric projection methods for constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific and Statical Computing*, 5(393–409), 1984.
- [GGSV94] J.-L. Goffin, J. Gondzio, R. Sarkissian, and J. P. Vial. Solving nonlinear multicommodity flow problems by analytic center cutting plane method. Technical report, Faculty of Management, McGill University, 1994.
- [Her92] D. Den Hertog. *Interior point approach to linear, quadratic and convex programming: algorithms and complexity*. PhD thesis, Delf University of Techology, Delf, The Netherlands, 1992.
- [Hu63] T. C. Hu. Multi-commodity network flows. *Operations Research*, 11:344–360, 1963.
- [JLFP93] K. L. Jones, I. J. Lustig, J. M. Farvolden, and W. B. Powell. Multicommodity network flows: the impact of formulation on decomposition. *Mathematical Programming*, 62:95–117, 1993.
- [Kar84] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.
- [KN91] K. Kim and J. L. Nazareth. The decomposition principle and algorithms for linear programming. *Linear Algebra and Applications*, 152:119–133, 1991.
- [Min83] M. Minoux. *Programmation Mathématique: Théorie et algorithmes*, volume 2. Centre National d’Etudes des Télécommunications et de l’Escole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1983.
- [OS] P. R. Oliveira and M. A. Santos. Using analytic center and cutting planes methods for nonsmooth convex programming. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (To appear).
- [Zha96] Y. Zhang. Solving large-scale linear programs by interior-point methods under MATLAB environment. Technical report, Departament of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County - USA, 1996.