

Método de aproximação poligonal de contornos utilizando redes complexas

ANDRÉ RICARDO BACKES¹
DALCIMAR CASANOVA¹
ODEMIR MARTINEZ BRUNO¹

USP - Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Computação e Estatística
Av. do Trabalhador São-Carlense, 400
Cx Postal 668 - CEP 13560-970 São Carlos (SP)
¹ (backes, dalcimar, bruno)@icmc.usp.br

Resumo. A aproximação poligonal de contornos é uma representação simplificada da sua essência utilizando o menor número possível de segmentos poligonais. Neste artigo é apresentado um novo método de estimativa da aproximação poligonal baseado na teoria das Redes Complexas. O método realiza inicialmente a modelagem da curva em uma rede regular e a transforma em uma rede complexa Pequeno-Mundo. Por meio da análise das propriedades desta rede, em especial o caminho geodésico, é calculada a aproximação poligonal. O artigo apresenta experimentos realizados com contornos, que demonstram as principais características do método bem como sua funcionalidade. O método proposto é comparado com a aproximação tradicional baseada no cálculo da curvatura.

Palavras-Chave: redes complexas, aproximação poligonal, menor caminho, coeficiente de clustering, modelo Pequeno-Mundo.

A contour polygonal approximation method based on complex networks

Abstract. Polygonal approximation of a contour is a simplified representation of its essence using the small number of possible polygonal segments. In this article a novel method of estimating a polygonal approximation based on Complex Networks theory is presented. The method performs initially the modeling of the curve in a regular network and after transforms this network in a Small-World Complex Network. By analysis of the network properties, in special, the geodesic path, it is calculated the polygonal approximation. The article presents the experiments performed on contours, which demonstrate the main characteristics of the method, as also its functionality. The proposed method is compared with traditional approximation based on curvature.

Keywords: complex networks, polygonal approximation, shortest path, clustering coefficient, Small-World model.

(Received August 10, 2006 / Accepted January 03, 2007)

1 Introdução

O contorno possui um papel importante na representação e análise de formas e objetos, sendo um dos atributos visuais mais importantes em processamento de imagens e visão computacional. Boa parte das informações dos contornos de formas são redundantes e podem ser simplificadas sem o prejuízo da representação da forma original. Nos sistemas biológicos de visão, esta evidência foi demonstrada por Atteneave [2]. Para isso, ele realizou experimentos de psicofísica verificando se o homem seria capaz de reconhecer formas, que contivessem apenas parte de seu contorno. Os experimentos de Atteneave, demonstraram que os pontos de alta curvatura observados nos objetos consistem na mais importante informação. Apenas observando os segmentos do contorno que apresentassem as maiores curvaturas, o sistema visual humano é capaz de reconhecer a forma original. Esta constatação motivou o desenvolvimento de métodos para reduzir as informações do contorno, sem perder as informações referentes a forma original.

Dentre os métodos de redução das curvas de contorno, estão os algoritmos de aproximação poligonal. Estes métodos mantêm a essência da curva de contorno com o menor número possível de segmentos poligonais. A aproximação poligonal apresenta diversas vantagens sobre outras formas de representação (uma revisão das mais diversas técnicas podem ser vistas em [9]) devido a sua simplicidade computacional, codificação eficiente, boa representação de propriedades locais e baixa complexidade para extração de características. Além disto, um aspecto importante da aproximação poligonal de curvas está na preservação da percepção da forma.

Uma forma pode ser representada com um conjunto de segmentos de reta que interligam os pontos de alta curvatura vizinhos de um dado contorno, usualmente este tipo de representação habilita o reconhecimento da forma por um observador humano. Este fato motivou um grande número de pesquisas em localização de pontos de alta curvatura (ou cantos) e sua conseqüente aproximação poligonal.

Algoritmos de aproximação poligonal se baseiam na eliminação de pontos da curva considerados redundantes e na conseqüente produção de um polígono composto por segmentos de reta [9]. Duas abordagens distintas são utilizadas para tal intuito: (1) obter uma aproximação a partir de um erro máximo pré-estabelecido e utilizando o menor número possível de vértices ou, (2) obter a aproximação a partir de um número pré-estabelecido de vértices, de modo que o erro seja o menor possível.

A literatura oferece diversos métodos voltados ao

cálculo da aproximação poligonal de uma forma [3, 4, 1], sendo um deles a curvatura [9]. Esse método se baseia em selecionar os pontos de máxima inflexão do contorno de um objeto. Estes pontos caracterizam a mudança na orientação da curva [2].

Neste artigo é apresentado um novo método para cálculo da aproximação poligonal de curvas digitais. O método foi desenvolvido tendo como base a Teoria das Redes Complexas, sendo a curva sob análise modelada como uma rede complexa. O método proposto e sua respectiva implementação são discutidos em detalhes no decorrer do artigo. São apresentados também experimentos em contornos, que quantificam os resultados da técnica e ilustram suas principais características. O método proposto é também comparado com o método tradicional de curvatura [9], e os bons resultados obtidos, demonstram a superioridade da técnica proposta para o cálculo da aproximação poligonal.

2 Redes complexas

Recentemente as Redes Complexas tem sido objeto de estudo em várias áreas da ciência como: matemática, ciências da computação, comunicação, biologia, sociologia, economia, entre outras [11]. Embora muitos tópicos de visão computacional possam ser modelados utilizando técnicas de Redes Complexas, este campo ainda está inexplorado, sendo encontrado poucas referências na literatura [8].

O termo "Redes Complexas" refere-se a uma rede (grafo) com uma estrutura topológica não trivial. Muitas das redes existentes no mundo real podem ser consideradas complexas pelo fato de possuírem diversas características topológicas que não existem em redes simples como, por exemplo, a presença de vértices na rede com diferentes graus de entrada, saída e coeficiente de clustering, presença de uma estrutura de comunidade, além da evidência de uma estrutura hierárquica. Em contraste, as redes simples não apresentam nenhuma destas propriedades, possuindo exatamente ou aproximadamente as mesmas características, independente da região da rede analisada.

Por sua vez o estudo das Redes Complexas pode ser definido como a intersecção entre a teoria de grafos e mecanismos estatísticos, denotando um campo de pesquisa interdisciplinar [10]. Apesar dos trabalhos pioneiros de Flory [15], Rapoport [17, 18, 19] e Erdős e Rényi [13, 12, 14] apenas mais recentemente este ramo de pesquisa tem recebido uma maior atenção. Isso se deve a descoberta de características de uniformidade aleatória presentes em redes reais. Redes derivadas de modelos reais podem possuir estrutura de comunidade, distribuição em escala exponencial, hubs, entre outras caracte-

rísticas. Duas teorias em particular motivaram o ressurgimento deste campo de pesquisa: Watts e Strongatz com investigações sobre Redes Pequeno-Mundo [20] e Barabási e Albert caracterizando os modelos livres de escala [5].

Uma das principais razões da popularização das Redes Complexas é a sua flexibilidade e generalidade de representação de uma estrutura natural, incluindo a dinamicidade de topologia [10]. Para comprovar tal intento basta observar que qualquer estrutura discreta como listas, árvores, redes ou imagens [8] podem ser apropriadamente representadas como um grafo. Desta forma diversos estudos envolvem a investigações da representação estrutural de interesse como uma rede complexa, seguida por uma análise das características topológicas da rede obtida e extração de suas características. Aplicações relacionadas utilizam os descritores obtidos para discriminar diferentes classes, concebendo assim técnicas para a área de reconhecimento de padrões [9, 16].

3 Método Proposto

Nesta seção, é apresentada a definição do problema de aproximação poligonal de curvas, sendo a seguir descrito a maneira como esse problema foi modelado em uma Rede Complexa.

3.1 Definição do Problema

Dada uma curva em uma imagem com n pontos dispostos em sentido horário, denotada

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

o objetivo da aproximação poligonal é encontrar um subconjunto destes pontos,

$$S^* = \{x_{v(1)}, x_{v(2)}, \dots, x_{v(m)}\},$$

onde $v(i) \in [1, n]$ é um conjunto de pontos em ordem crescente, com $1 \leq i \leq m$ e $m \leq n$. O conjunto desses m segmentos de linha,

$$P = \{\overline{x_{v(1)}x_{v(2)}}, \dots, \overline{x_{v(m-1)}x_{v(m)}}, \overline{x_{v(m)}x_{v(1)}}\},$$

compõem uma aproximação poligonal da curva S , desde que o erro existente entre S e P seja menor que um erro ϵ . De modo a tornar essa representação mais conveniente, S é considerado como uma lista circular (x_1 é o ponto sucessor de x_n) e $\widehat{x_i x_j}$ é definido como a coleção de pontos x_i, x_j e todos os seus pontos intermediários, isto é, $\widehat{x_i x_j} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j\}$. A Figura 1 ilustra o arco $\widehat{x_i x_j}$ como uma coleção de seis pontos,

$$\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}, x_j\}.$$

O erro existente entre S e P , denotado como $E(S, P)$, é então definido como a soma dos erros de aproximação dos m arcos,

$$\{\widehat{x_{v(1)}x_{v(2)}}, \widehat{x_{v(2)}x_{v(3)}}, \dots, \widehat{x_{v(m-1)}x_{v(m)}}, \widehat{x_{v(m)}x_{v(1)}}\}$$

e os m correspondentes segmentos de linha,

$$\{\overline{x_{v(1)}x_{v(2)}}, \overline{x_{v(2)}x_{v(3)}}, \dots, \overline{x_{v(m-1)}x_{v(m)}}, \overline{x_{v(m)}x_{v(1)}}\}.$$

Temos então

$$E(S, P) = \sum_{i=1}^m e(x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}),$$

onde $v(m+1) = v(1)$ e $e(x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}})$ é o erro de aproximação existente entre o arco formado por $x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}$ e o segmento de linha $\overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}$. O valor de

$$e(x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}})$$

pode ser estimado de diversas maneiras. Aqui foi considerado a soma do quadrado da distância perpendicular existente entre cada ponto do arco e seu respectivo segmento, ou seja,

$$e(x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}) = \sum_{x_j \in x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}} d^2(x_j, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}),$$

onde $d(x_j, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}})$ é a distância perpendicular do ponto x_j ao seu segmento correspondente, $\overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}$. Por exemplo, a Figura 1 mostra o erro de $x_{v(i)}\widehat{x_{v(i+1)}}$ calculado como a soma de $d^2(x_i, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}) + d^2(x_{i+1}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}) + d^2(x_{i+2}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}) + d^2(x_{i+3}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}) + d^2(x_{i+4}, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}}) + d^2(x_j, \overline{x_{v(i)}x_{v(i+1)}})$.

3.2 Representação por Rede Complexa

Para aplicar as Redes Complexas ao problema, deve-se construir uma representação do problema em termos de um grafo $G = \langle N, E \rangle$. Cada ponto da curva é então representado como um vértice pertencente ao grafo, isto é, $N = S$.

O conjunto de arestas E que compõem a rede é então calculado da seguinte maneira: para cada vértice $x_i \in S$, são examinados os vértices restantes, $x_j \in S$, em sentido horário. Uma aresta ligando esses vértices, $\overrightarrow{x_i x_j}$, é adicionada, sendo o peso dessa aresta o erro de aproximação existente entre o arco $\widehat{x_i x_j}$ e o segmento de linha $\overline{x_i x_j}$, $e = (\widehat{x_i x_j}, \overline{x_i x_j})$.

A rede inicial formada é composta por um conjunto de arestas E ligando cada par de vértices da rede. Isso

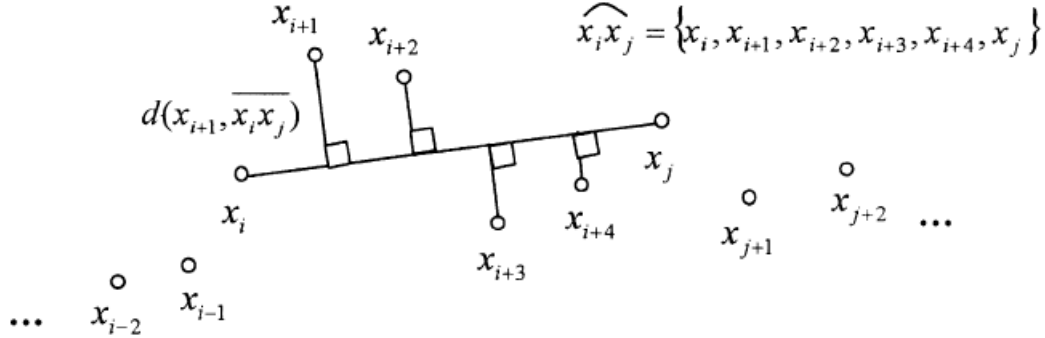


Figura 1: Exemplo do arco $\widehat{x_{v(i)}x_{v(j)}}$ e o cálculo de $e(x_{v(i)}\widehat{x_{v(j)}}, \overline{x_{v(i)}x_{v(j)}})$

significa que a rede apresenta um comportamento regular, uma vez que todos os seus vértices possuem o mesmo número de ligações que os demais vértices. No entanto, uma rede regular não é considerada uma rede complexa, não apresentando nenhuma propriedade relevante para a aplicação desenvolvida. Faz-se necessário então transformar essa rede regular em uma rede complexa que possua propriedades relevantes para a aplicação.

Analisando os modelos de redes complexas existentes na literatura, nota-se que o modelo de Pequeno-Mundo proposto por Watts e Strongatz [20] é o que melhor se encaixa no problema da aproximação poligonal. Esse modelo se caracteriza pela existência de duas propriedades básicas na rede: (i) coeficiente de clustering alto e (ii) propriedade de Pequeno-Mundo. O coeficiente de clustering de uma rede é definido como

$$C = 3N_{\Delta}/N_3,$$

onde N_{Δ} é o número de triângulos existentes na rede e N_3 o número de triplas conectadas. A quantidade de triângulos na rede é determinada pela quantidade de laços de tamanho três, ou seja, se o vértice i é conectado aos vértices j e k , então há uma alta probabilidade dos vértices j e k também serem conectados. Já a propriedade de Pequeno-Mundo caracteriza a existência de um caminho na rede de tamanho médio pequeno, ou seja, todos os vértices podem ser alcançados a partir de outros vértices através de um número pequeno de arestas. Essa propriedade garante a existência de caminhos pequenos na rede entre seus diversos vértices, o que para o problema modelado, representa uma possível aproximação poligonal da curva.

A existência dessa propriedade na rede é fundamental para a obtenção de bons resultados, de modo que se faz necessário modelar a curva digital como uma rede Pequeno-Mundo. Isso pôde ser obtido realizando-se

uma transformação do tipo $T : E \rightarrow \widehat{E}$, a qual produz um novo conjunto de arestas para a rede. Essa transformação $T : E \rightarrow \widehat{E}$ é realizada selecionando-se o conjunto de arestas \widehat{E} de E , de modo que as arestas selecionadas possuem peso menor ou igual ao parâmetro ϵ_1 . Neste caso, ϵ_1 funciona como um controle da visibilidade dos vértices da rede, limitando assim o número de vértices que um vértice pode alcançar para compor a aproximação de um arco. Dessa forma é possível converter uma rede inicialmente regular em uma rede complexa que se encaixa no modelo de Pequeno-Mundo proposto por Watts e Strongatz [20].

Uma vez que a curva foi modelada como uma rede Pequeno-Mundo, uma solução ideal para o problema de aproximação poligonal será o conjunto de arestas e vértices existentes ao longo de um caminho formado por um conjunto de arestas E^* , o qual se inicia e termina no mesmo vértice, e que respeita um erro ϵ atribuído a aproximação poligonal da curva.

Com isso, o problema da aproximação poligonal se restringe a encontrar o menor ciclo (caminho geodésico entre i e i) existente dentro da rede, respeitando um erro ϵ . Para uma melhor representação do problema, algumas notações foram definidas. Considere $ciclo_v$, o menor ciclo pertencente à rede que inicie e termine no vértice v , o número de vértices pertencentes à $ciclo_v$ como $|ciclo_v|$, e o erro entre a curva original S e a aproximação correspondente à $ciclo_v$ como $E(S, ciclo_v)$.

3.3 Cálculo do Menor Ciclo

Em uma rede complexa, dado dois vértices, i e j , o problema do caminho geodésico (ou caminho mínimo) consiste em minimizar o custo da travessia do grafo existente entre esses dois vértices, sendo este custo definido como a soma dos pesos de cada aresta percorrida. O caminho geodésico entre dois vértices é uma importante regra de caracterização da estrutura interna de uma

rede [6].

Os algoritmos especializados em solucionar o problema de caminho mínimo com fonte única são bem conhecidos na literatura. Um dos métodos usados para localizar caminhos mínimos entre uma origem s e um destino v em uma rede é o algoritmo de Bellman-Ford, um algoritmo iterativo que utiliza a técnica de relaxamento de arestas [7]. Neste trabalho, optou-se pela utilização deste algoritmo devido a sua simplicidade, facilidade de implementação e generalidade.

Dado um grafo $G = \langle N, E \rangle$ ponderado e orientado, uma origem s e uma função peso w , o algoritmo retorna os menores caminhos existentes na rede, cuja origem seja o vértice s , bem como o respectivo custo desse caminho. Para cada vértice $v \in N$, é mantido o atributo $d[v]$, correspondente ao custo do menor caminho existente entre s e v , e o atributo $r[v]$, o qual especifica o vértice predecessor ao vértice v . O processo de inicialização do caminho mínimo ocorre de acordo com o seguinte algoritmo:

```
PROCEDIMENTO Inicialize( $G, s$ )
Para cada  $v \in N$ 
     $d[v] = \infty$ 
     $r[v] = NIL$ 
 $d[s] = 0$ 
```

Já o processo de relaxamento de uma aresta (u, v) consiste em verificar se o vértice v pode ter seu caminho mínimo reduzido, tendo como predecessor o vértice u . Essa etapa consiste em tentar decrementar o custo do caminho estimado para v , $d[v]$, e atualizar seu predecessor, $r[v]$. Essa etapa é realizada por meio do algoritmo:

```
PROCEDIMENTO relax( $u, v, w$ )
SE  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ 
     $d[v] = d[u] + w(u, v)$ 
     $r[v] = u$ 
```

Por fim, o algoritmo de Bellman-Ford é descrito pelo seguinte conjunto de etapas:

```
BELLMAN-FORD( $G, s, w$ )
Inicialize( $G, s$ )
Para cada  $v \in N$ 
    Para cada  $(u, v) \in E$ 
        Relax( $u, v, w$ )
Para cada  $(u, v) \in E$ 
    SE  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ 
        Erro. Ciclo Negativo encontrado.
```

No caso da aproximação poligonal de uma curva é necessário obter o caminho geodésico existente em uma rede complexa iniciando em um vértice s e terminando em um vértice v , onde $v = s$. Esse caminho geodésico é considerado o menor ciclo da rede iniciando no vértice s .

3.4 Algoritmo

De modo a obter uma aproximação poligonal que melhor caracterize uma curva é proposto o algoritmo descrito na Tabela 1. A sua idéia básica é selecionar um conjunto de arestas \hat{E} da rede, onde o peso de cada aresta não seja maior que um limiar ϵ_1 . Esse novo conjunto de arestas acaba por redefinir o comportamento e as propriedades da rede, transformando assim uma rede regular em uma rede complexa do tipo Pequeno-Mundo. A partir desta nova rede, realiza-se o cálculo do menor ciclo da rede. Para isso, aplica-se na rede o algoritmo do menor ciclo como descrito na seção 3.3. Uma vez que o vértice inicial pode exercer influência sobre o cálculo do ciclo, torna-se necessário realizar esse cálculo considerando cada um dos vértices da rede com um possível início para o ciclo.

4 Resultados Experimentais e Discussão

Para verificar a eficiência do método proposto na aproximação poligonal de curvas, um experimento foi proposto. Nele, duas curvas originárias de contornos de formas foram utilizadas (Figura 2). Elas tiveram as suas respectivas aproximações poligonais calculadas pelo método proposto utilizando-se diferentes valores para o parâmetro ϵ_1 . Isto foi realizado visando verificar a influência que este parâmetro possui sobre o resultado da aproximação, bem como as características e particularidades que o método proposto apresenta.

Como descrito anteriormente, a utilização do parâmetro ϵ_1 permite converter a rede inicialmente calculada (e que possui comportamento regular) em uma rede complexa do tipo Pequeno-Mundo (Figura 3). No entanto, é necessário verificar se a mesma possui as propriedades que caracterizam uma rede complexa Pequeno-Mundo. Pode-se ver na Figura 4 que a rede modelada apresenta um coeficiente de clustering alto, independente do valor utilizado para o parâmetro ϵ_1 . Isso indica um alto nível de transitividade entre os vértices da rede, ou seja, é possível encontrar mais de um caminho na rede ligando o vértice i ao vértice j . A outra propriedade das redes Pequeno-Mundo refere-se a existência de um caminho geodésico médio pequeno na rede, ou seja, todos os vértices podem ser alcançados a partir de outros vértices através de um número pequeno de arestas. Esta constitui uma propriedade de grande interesse para o problema da aproximação poligonal, pois a aproximação poligonal constitui do caminho geodésico na rede o qual inicia-se e termina no mesmo vértice. A Figura 5 apresenta a variação do comprimento do caminho geodésico médio e do menor ciclo da rede, à medida que se varia o parâmetro ϵ_1 . É interessante constatar que o tamanho do menor ciclo é aproximadamente o dobro

Entrada

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: conjunto de pontos dispostos em sentido horário que representam uma curva.

MAX_LIMIAR : valor máximo que pode ser atribuído a ϵ_1

1. Inicialize

Construa o grafo direcionado $G = \langle N, E \rangle$, como descrito na seção 3.2.

Seja $ciclo_{m\u00ednimo} = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$

2. Para ϵ_1

Selecione \hat{E}

Para cada $v \in N$

Calcule o menor ciclo iniciando em v , $ciclo_v$

3. Selecione o menor ciclo dentre os calculados, $ciclo_{m\u00ednimo_atual}$, com erro menor que ϵ

4. Se $|ciclo_{m\u00ednimo_atual}| < |ciclo_{m\u00ednimo}|$, ent\u00e3o $ciclo_{m\u00ednimo} = ciclo_{m\u00ednimo_atual}$

5. Se $(\epsilon_1 = MAX_LIMIAR)$, exibir $ciclo_{m\u00ednimo}$ e pare.

Caso contr\u00e1rio, incremente ϵ_1 e volte para o passo 2.

Tabela 1: Algoritmo Proposto

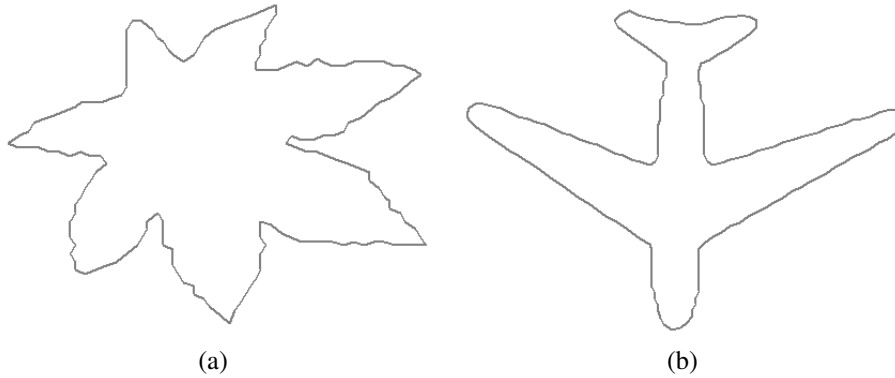


Figura 2: Curvas utilizadas na valida\u00e7\u00e3o do m\u00e9todo proposto: (a)Folha ($n = 172$) e (b)Avi\u00e3o ($n = 186$).

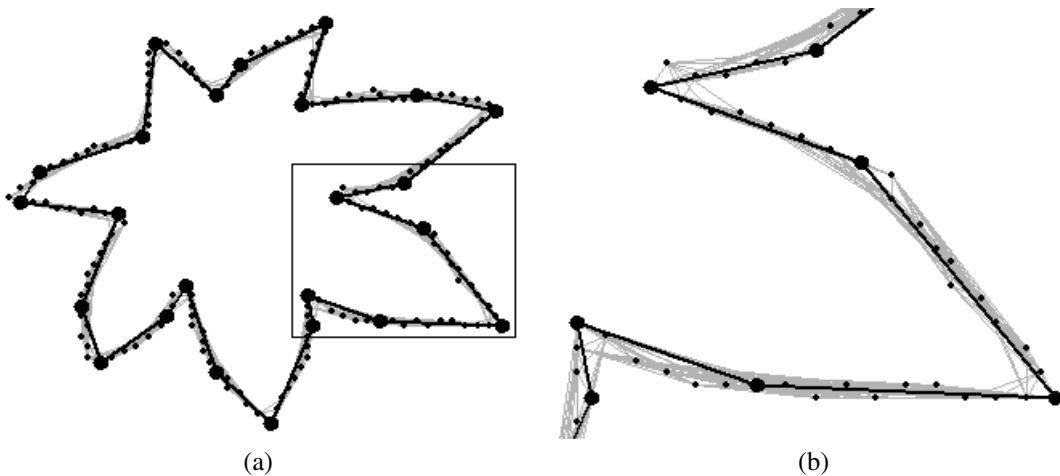


Figura 3: (a)Rede complexa modelada para a Figura Folha com $\epsilon_1 = 10$ e seu respectivo menor ciclo. (b) Zoom em uma pequena por\u00e7\u00e3o da rede.

do caminho geod\u00e9sico m\u00e9dio. Isso ocorre j\u00e1 que um ciclo pode ser considerado como a concatena\u00e7\u00e3o de dois

caminhos geod\u00e9sicos m\u00e9dios: o caminho entre os v\u00e9rtices i e k , e o caminho entre os v\u00e9rtices k e j , sendo que

$i = j$.

Ao analisar o comprimento do menor ciclo, percebe-se que este diminui a medida que se aumenta o valor de ϵ_1 , isso por que este parâmetro limita o erro máximo que um segmento $\overline{x_i x_j}$ poderá ter na curva. Desse modo, impede-se a eliminação de um número excessivamente grande de vértices em um único segmento da aproximação. Por outro lado, a medida que o valor de ϵ_1 é aumentado, permite-se que os vértices da rede criem segmentos com um menor número de pontos (Figura 5). Por esse motivo é necessário utilizar o parâmetro ϵ , o qual, limita o erro máximo que a aproximação poligonal poderá ter, impedindo assim que se obtenham aproximações com uma quantidade muito pequena de pontos e, conseqüentemente, evitando-se a deformação da curva original.

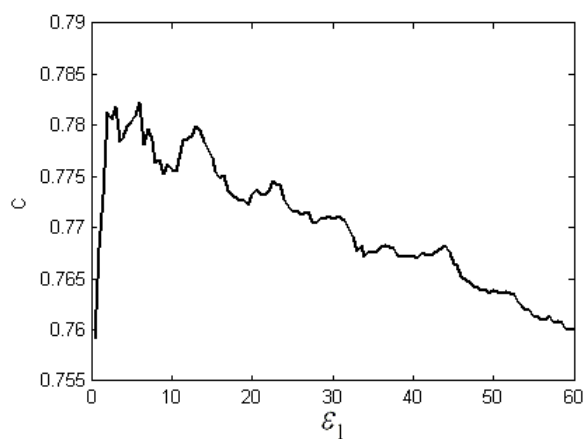


Figura 4: Coeficiente de clustering da Figura Folha segundo o valor de ϵ_1 .

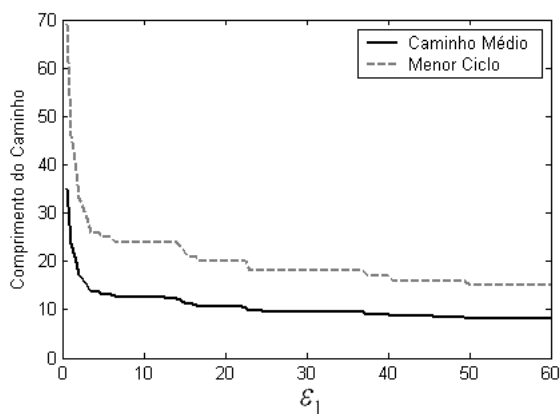


Figura 5: Variação do comprimento do menor ciclo e do caminho médio segundo o valor ϵ_1 para a Figura Folha.

Um detalhe importante do método diz respeito ao

vértice inicial utilizado no cálculo do menor ciclo da rede. Ao analisar os menores ciclos obtidos quando se considera cada um dos vértices da rede como vértice inicial do ciclo, percebe-se que este não possui grande influência sobre o resultado final da aproximação. De fato percebe-se que, independente do vértice inicial utilizado, existem na rede certos vértices cuja probabilidade de serem selecionados para compor um menor ciclo é maior (Figura 6). Esse comportamento indica a existência de um conjunto de vértices na rede no qual o custo de travessia da rede, para um certo ϵ_1 , é mínimo. De fato, o próprio parâmetro ϵ_1 é o responsável pela existência desse conjunto de vértices, uma vez que ele limita a visibilidade dos vértices da rede e impede a formação de segmentos com um alto erro de aproximação. Outra conseqüência da presença desse comportamento na rede é a pouca variação na tamanho do ciclo obtido, independente do vértice escolhido como inicial. As Figuras 7 e 8 apresentam alguns resultados da aproximação poligonal à medida que se varia o parâmetro ϵ_1 . Percebe-se que à medida que se aumenta o valor do parâmetro ϵ_1 ocorre uma diminuição do número de pontos que compõem a aproximação poligonal da curva. Como conseqüência, ocorre um aumento do erro final obtido na aproximação.

Os resultados obtidos com o método proposto foram comparados com os resultados obtidos com o método da curvatura às curvas selecionadas. Por meio da análise do gráfico de curvatura de uma curva digital é possível selecionar os pontos de máximos e mínimos locais, os quais correspondem aos pontos onde a curva muda sua direção. Conseqüentemente, esta seleção produz uma aproximação poligonal da curva analisada. A Tabela 2 apresenta os resultados da comparação realizada entre a aproximação poligonal por curvatura e pela proposta neste trabalho. É possível perceber que, apesar de ambos os métodos obterem aproximações com o mesmo número de pontos, o método da curvatura produz aproximações com um erro maior. Isso se deve a dificuldade de selecionar os pontos do gráfico de curvatura que possuem maior influência no comportamento da curva. Percebe-se que os pontos selecionados indicam apenas variações na direção da curva, sem se importar com quão significativas são essas variações ou com o tamanho do segmento formado e seu respectivo erro (Figura 9). Por outro lado, o método proposto apresenta uma efetividade superior (em termos de "erro") pois a seleção dos pontos está atrelada a importância do ponto na curva. Verifica-se que nem todos os pontos de alta curvatura são descritores da forma, alguns podem representar apenas ruídos existentes na borda. No método proposto o erro gerado por estes ruídos em relação a curva original é mínimo, sendo assim descartados da

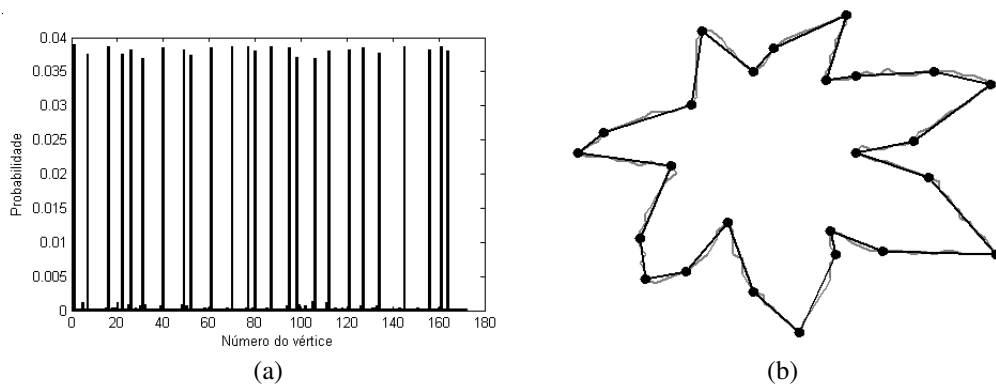


Figura 6: (a) Probabilidade de um vértice ser escolhido para compor um menor ciclo da aproximação poligonal da Figura Folha, para $\epsilon_1 = 5$. (b) Aproximação formada pelos vértices com maior probabilidade.

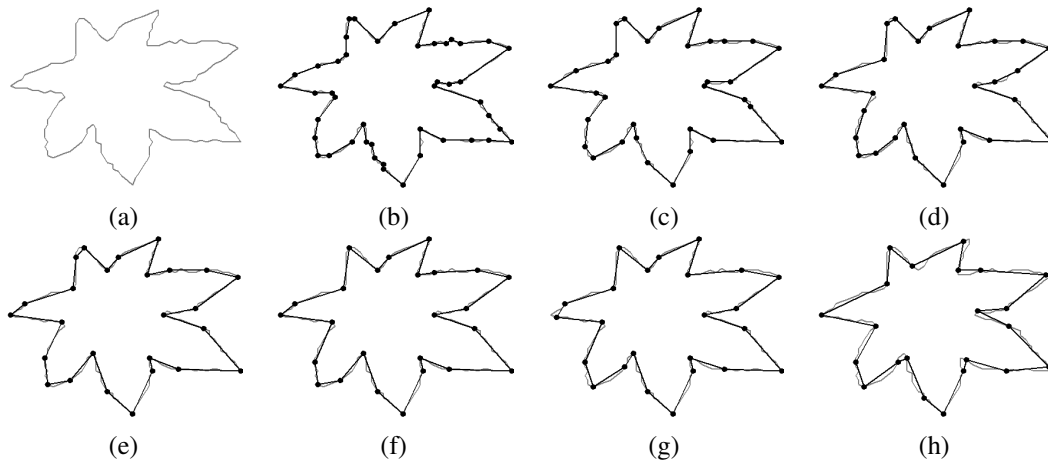


Figura 7: Exemplo de aproximações poligonais obtidas para a Figura Folha, com respectivo erro de aproximação (ϵ) e número de vértices utilizados (m): (a) Curva Original; (b) $\epsilon = 24, 81, m = 46$; (c) $\epsilon = 38, 15, m = 33$; (d) $\epsilon = 50, 13, m = 29$; (e) $\epsilon = 53, 24, m = 26$; (f) $\epsilon = 54, 84, m = 25$; (g) $\epsilon = 73, 58, m = 24$; (h) $\epsilon = 172, 77, m = 22$

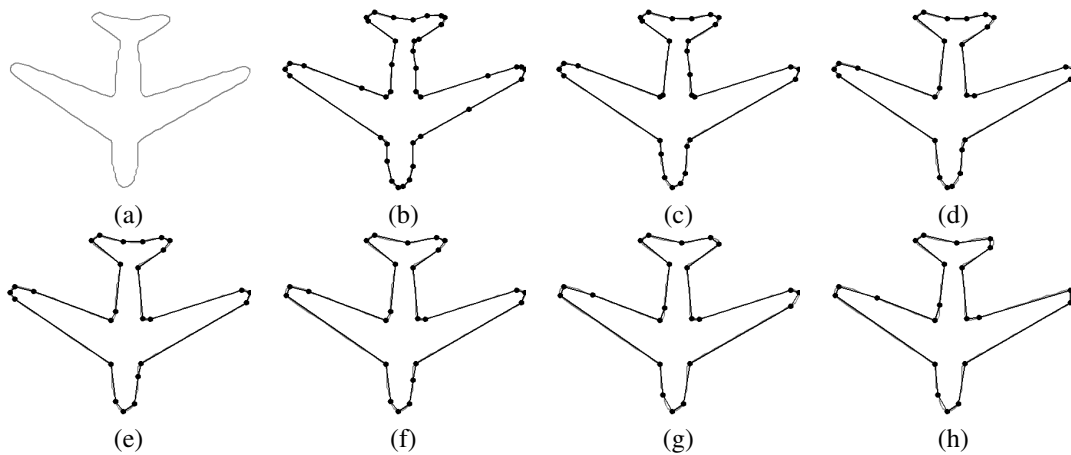


Figura 8: Exemplo de aproximações poligonais obtidas para a Figura Avião, com respectivo erro de aproximação (ϵ) e número de vértices utilizados (m): (a) Curva Original; (b) $\epsilon = 17, 90, m = 40$; (c) $\epsilon = 31, 50, m = 31$; (d) $\epsilon = 45, 22, m = 27$; (e) $\epsilon = 47, 66, m = 26$; (f) $\epsilon = 57, 90, m = 24$; (g) $\epsilon = 76, 83, m = 22$; (h) $\epsilon = 103, 20, m = 21$

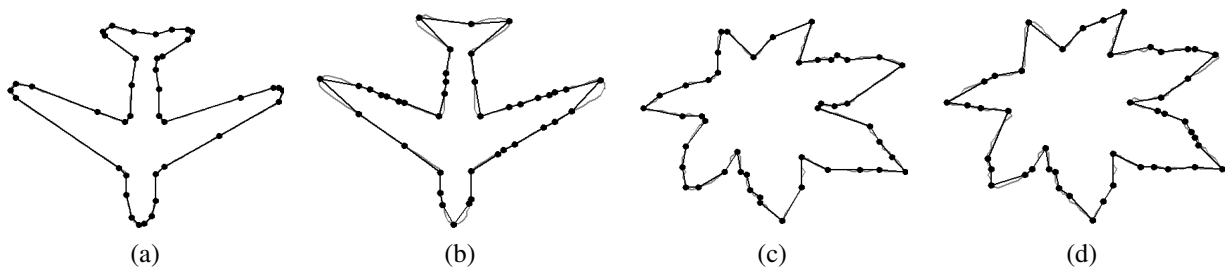


Figura 9: Exemplo de aproximações obtidas pelo método proposto e a curvatura. (a) Redes Complexas ($\epsilon = 17, 90, m = 40$); (b) Curvatura ($\epsilon = 435, 16, m = 40$); (c) Redes Complexas ($\epsilon = 24, 81, m = 46$); (d) Curvatura ($\epsilon = 52, 42, m = 46$)

Curvas	m	Redes Complexas	Curvatura
		ϵ	ϵ
Folha ($n = 172$)	69	12,4	34,2
	46	24,8	52,4
	33	38,1	122,3
	24	61,9	287,2
	20	216,8	352,2
Avião ($n = 186$)	52	13,6	386,5
	40	17,9	435,1
	36	22,6	395,6
	26	47,6	661,8
	22	76,8	753,5

Tabela 2: Resultados obtidos comparando as redes complexas e a curvatura.

aproximação final. Outro fator a se considerar é que a busca do caminho geodésico em uma rede é uma estratégia de busca de mínimos globais, o que implica na escolha dos pontos que caracterizam o aspecto geral da curva, diminuindo o erro recorrente do segmento criado.

5 Conclusões

Neste artigo foi apresentado um novo método para cálculo da aproximação poligonal de curvas digitais. Baseado na teoria de Redes Complexas o método utiliza a representação de um contorno como uma rede complexa Pequeno-Mundo, onde os pontos discretizados da curva representam os vértices da rede e, as arestas são representadas pelos segmentos que compõem uma possível aproximação poligonal da curva. Sendo que a aproximação poligonal da curva é obtida pelo ajuste do menor ciclo existente na rede.

Os experimentos reportados no artigo ilustram que o parâmetro ϵ_1 é capaz de determinar a visibilidade dos vértices que serão pesquisados pela técnica, limitando o número de vértices que outro vértice pode alcançar para compor a aproximação do arco. Verificou-se tam-

bém que o vértice inicial do ciclo não interfere nos resultados obtidos, problema este encontrado em métodos seqüenciais.

Os experimentos realizados, bem como as características e propriedades discutidas, demonstram que o novo método é uma ótima solução ao problema da aproximação poligonal, uma vez que supera os métodos tradicionais. O método foi comparado com a aproximação poligonal por curvatura e os resultados quantitativos produzidos demonstraram a superioridade da técnica proposta, que apresentou melhores taxas de acerto. Uma importante característica do método proposto é a sua flexibilidade, uma vez que, a visibilidade ϵ_1 permite que diferentes aproximações possam ser obtidas. No tocante a teoria de Redes Complexas, este trabalho demonstra um bom potencial de aplicação desta abordagem nos problemas de visão computacional e processamento de imagens.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (Proc. 303746/2004-1) e a FAPESP (Proc. 06/53972-6) pelo apoio à pesquisa.

Referências

- [1] A. Held, C. A., K. Abe. Towards a hierarchical contour description via dominant point detection. *IEEE Trans. System Man Cybernet*, 24:942–949, 1994.
- [2] Attneave, F. Some informational aspects of visual perception. *Psychological Review*, 61(2):183–193, 1954.
- [3] B. K. Ray, K. S. R. Determination of optimal polygon from digital curve using l1 norm. *Pattern Recognition*, 26:505–509, 1993.
- [4] B. K. Ray, K. S. R. A new split-and-merge technique for polygonal approximation of chain coded curves. *Pattern Recognition*, 16:161–169, 1995.

- [5] Barabasi, A.-L. and Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, Oct. 1999.
- [6] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., and Hwang, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4–5):175–308, February 2006.
- [7] Cherkassky, B. V., Goldberg, A. V., and Radzik, T. Shortest paths algorithms: Theory and experimental evaluation. In *SODA*, pages 516–525, Arlington, Virginia, 1994.
- [8] da F. Costa, L. Complex networks, simple vision, Mar. 14 2004.
- [9] da F. Costa, L. and Cesar, Jr., R. M. *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*. CRC Press, Dec. 2000.
- [10] da F. Costa, L., Rodrigues, F. A., Travieso, G., and Boas, P. R. V. Characterization of complex networks: A survey of measurements, June 30 2005. Comment: A working manuscript with 48 pages, 17 figures. Suggestions of measurements for inclusion are welcomed by the authors.
- [11] Dorogovtsev, S. N. and Mendes, J. F. F. *Evolution of Networks: from Biological nets to the Internet and WWW*. Oxford University Press, 1 edition edition, 2003.
- [12] Erdos, P. and Rényi, A. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5:17–61, 1960.
- [13] Erdős, P. and Rényi, A. On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297, 1959.
- [14] Erdős, P. and Rényi, A. On the strenght of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Scientia Hungary*, 12:261–267, 1961.
- [15] Flory, P. J. Molecular size distribution in three-dimensional polymers. *Journal of the American Chemical Society*, 63:3083–3090, 1941.
- [16] Marchette, D. J. *Random Graphs for Statistical Pattern Recognition*. 1 edition edition, 2005.
- [17] Rapoport, A. Nets with distance bias. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 13:85–91, 1951.
- [18] Rapoport, A. Spread of information through a population with sociostructural bias: I. assumption of transitivity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 15:523–533, 1953.
- [19] Rapoport, A. Contribution to the theory of random and biased nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 19:257–277, 1957.
- [20] Watts, D. J. and Strogatz, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.