

Técnicas de Estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo

André Ricardo Backes¹, Odemir Martinez Bruno²

Universidade de São Paulo

ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Departamento de Computação e Estatística

backes@icmc.usp.br, bruno@icmc.usp.br

Resumo: A estimativa da Dimensão Fractal determina a complexidade de objetos fractais, e pode ser estendida para diversas aplicações. Neste artigo é apresentado um estudo comparativo entre alguns dos principais métodos de estimativa da Dimensão Fractal. Através de comparação experimental, entre objetos fractais e formas geométricas simples é realizada um estudo de casos para cada uma das técnicas, levando em consideração aspectos de implementação, precisão da técnica, variação segundo parâmetros e automatização. Com base nos resultados experimentais é desenvolvida uma discussão, caracterizando os pontos fortes e fracos de cada método.

Pavavras-Chaves: Dimensão Fractal, Complexidade, BoxCounting, Minkowski, Dividers, Massa Raio, Análise de Intersecções Acumulativas.

Estimate Techniques of the Fractal Dimension: A Comparative Study

Abstract: The estimate of the Fractal Dimension, determines the complexity of fractal objects and it may be extended to many applications. This paper presents a comparative study between some important methods of estimate of the Fractal Dimension. Based on the experimental comparison between fractal objects and simple geometrical forms, we do a case study for each technique, observing the implementation, the technique accuracy, and the variation according to parameters and automation.

Keywords: Fractal Dimension, Complexity, BoxCounting, Minkowski, Dividers, Analysis of Cumulative Intersections.

(Received April 8, 2005 / Accepted July 21, 2005)

1. Introdução

Muitos fenômenos e formas encontradas na natureza não podem ser explicados nos moldes da matemática convencional, sendo para isso necessário uma matemática especial que os explique e caracterize, a chamada Matemática dos Fractais.

Tanto o padrão de formação de nuvens quanto o padrão de crescimento e disposição de galhos e folhas numa árvore podem ser recriados por meio de regras simples de construção geométrica, mas que ao serem executadas são capazes de gerar estruturas de complexidade admirável, os Fractais.

Fractais são formas geométricas incapazes de serem classificadas nos moldes da Geometria Euclidiana devido principalmente a três características

fundamentais que os definem e distinguem de outras formas: auto-semelhança em diferentes níveis de escala, Dimensão Fractal e sua complexidade infinita [8].

Atualmente a Geometria Fractal, e em especial a Dimensão Fractal, vem sendo utilizada em diversas áreas do conhecimento [2], [3], [9] e [17], como o estudo de sistemas caóticos (padrão de formações de nuvens, por exemplo); caracterização de objetos; análise e reconhecimento de padrões em imagens; análise de texturas e medição de comprimento de curvas.

Devido às diversas aplicações da Dimensão Fractal vários são os métodos encontrados na literatura. Este artigo apresenta um estudo comparativo dos principais métodos de estimativa da Dimensão Fractal.

2. Dimensão Fractal

Das características que definem um fractal, a mais importante é a Dimensão Fractal. Ao contrario do que é observado na Geometria Euclidiana, onde o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que dado objeto está inserido, a Dimensão Fractal (ou Dimensão dos Fractais) representa o nível de irregularidade de um fractal.

Essa diferença nas definições faz com que a Dimensão Fractal venha a assumir valores fracionários como, por exemplo, 1.6 e 2.1, algo diferente dos valores inteiros encontrados para as dimensões Euclidianas. O fato de a Dimensão Fractal ser um valor fracionário se deve por ela representar o nível de ocupação do espaço pela forma e não o espaço em si onde a forma está inserida. Sendo assim, quanto maior a irregularidade de uma forma, maior é a sua Dimensão Fractal. Essa característica da Dimensão Fractal a torna uma ferramenta muito útil para a comparação de duas formas fractais [4].

A Literatura fornece diversas abordagens para se estimar a Dimensão Fractal de um objeto ou imagem. No entanto, a grande maioria delas se baseia na Dimensão de Hausdorff.

Para entender a Dimensão de Hausdorff considere uma linha de comprimento L e outra de comprimento u , de modo que $L > u$. Sobrepondo a linha u sobre a linha L até cobri-la completamente, encontra-se um valor $N = L/u$, que nada mais é do que uma medida da linha. Do mesmo modo que foi feito para a linha, pode-se medir um quadrado de lado L cobrindo-o com pequenos quadrados de lado u , obtendo-se a mesma relação $N = L/u^2$ [7] e [19].

Esse processo leva a uma relação do tipo $N = (L/u)^D$ ou, se aplicando logaritmo de ambos os lados,

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(L/u)}$$

onde D é a Dimensão Fractal de Hausdorff do objeto analisado. Para um objeto uniforme e compacto, D é um inteiro igual à dimensão topológica. Mas, para um fractal, tem-se que D é um número fracionário [7], [15] e [19].

3. Métodos

Vários são os métodos de estimativa da Dimensão Fractal existentes na literatura atual. No entanto, nem todos os métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de estrutura. Isso ocorre por que cada método se baseia num tipo de medição diferente do objeto analisado, gerando resultados diferentes para um mesmo objeto. A seguir são descritos os principais métodos de estimativa de Dimensão Fractal que podemos encontrar na literatura.

3.1. Massa Raio

O método de cálculo de Massa-Raio consiste em sobrepor círculos sobre uma forma e contar a quantidade de pontos dessa forma presentes dentro do interior do círculo. Esse método se baseia na relação:

$$M_r(A) = \mu \cdot r^D$$

onde $M_r(A)$ é o número de pontos de uma forma A presentes em um círculo de raio r , sendo μ uma constante.

A partir da relação acima, obtém-se a Dimensão Fractal (D) como sendo

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(M_r(A))}{\ln(r)}$$

Para calcular D esse método, um ou mais círculos podem ser utilizados. No caso de se utilizar apenas um círculo, é interessante escolher o centro do círculo como sendo o centro de massa da forma analisada. Já no caso de se utilizar vários círculos, um mecanismo de sorteio pode ser utilizado para se escolher os diferentes centros dos círculos, além é claro de se considerar a massa média calculada pelos vários círculos.

Outro detalhe desse método se refere ao raio máximo (r_{\max}) que será utilizado na expansão dos círculos. Apesar desse valor poder ser definido por usuário, é comum utilizar o raio de giro da imagem. Os raios r utilizados no método variam então entre $1 \leq r < r_{\max}$, sendo a cada nova iteração o raio incrementado em 1 e o cálculo da massa realizado novamente [6].

Traçando o gráfico de log-log entre $M_r(A)$, massa acumulada para um raio r , e r , raio do círculo usado, obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde é $D = \alpha$ é Dimensão Fractal de A [7], [10].

3.2. Análise intersecção Acumulativa

O método da intersecção acumulativa foi desenvolvido por Schierwagen [12], baseado no trabalho de Sholl [14]. Trata-se de um método similar ao método Massa-Raio, no entanto, ao invés de calcular a massa de uma região esse método calcula o número de intersecções ou subdivisões existentes nessa região [6].

Esse método se baseia na relação

$$M_r(A) = \mu \cdot r^D$$

onde $M_r(A)$ é o número de intersecções existentes na forma A quando sobreposta por um círculo de raio r.

A partir da relação acima, obtém-se a Dimensão Fractal (D) como sendo

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(M_r(A))}{\ln(r)}$$

Como no método de Massa-Raio, aqui também pode se utilizar um ou mais círculos, desde de que observadas as mesmas restrições impostas no método de Massa-Raio. Quanto ao raio máximo (r_{\max}) que será utilizado como limite para a expansão dos círculos, seu valor pode ser definido por usuário, bem como pode-se tomá-lo como sendo o raio de giro da imagem. Os raios r utilizados no método variam então entre $1 \leq r < r_{\max}$, sendo a cada nova iteração o raio incrementado em 1 e o cálculo de intersecções realizado novamente [6].

A contagem de intersecções é então realizada ordenando os pontos pertencentes à forma e à borda do círculo pelo valor do ângulo que fazem com o centro do círculo, sendo após isso verificada a adjacência de pontos consecutivos [6].

Traçando o gráfico de log-log entre $M_r(A)$, número de intersecções para um raio r, e r, raio do círculo usado, obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = \alpha$ é Dimensão Fractal de A [7], [10].

3.3. BoxCounting

O BoxCounting é um dos métodos mais conhecidos e utilizados para estimar a Dimensão Fractal de uma forma ou imagem. Isso se deve a sua simplicidade e facilidade de implementação. Este método consiste em sobrepor à imagem uma malha de quadrados e contar o número de quadrados necessários para cobrir toda a forma [COELHO et al. (1995)]. Ele se baseia na relação:

$$N_r(A) = \mu \cdot r^{-D}$$

onde $N_r(A)$ é o número de caixas de lado r que contenham parte da forma A. A partir da relação acima, obtém-se a Dimensão Fractal (D) como sendo

$$D = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(N_r(A))}{\ln(r)}$$

Para a execução desse método é necessário definir um conjunto B de tamanhos de lados r a ser utilizado nas diversas iterações do método. Apesar de B poder ser definido inicialmente por um usuário, é padrão calculá-lo com base nas dimensões da forma, de modo que:

$$\forall r_i \in B \begin{cases} r_0 = \max(\text{altura}, \text{largura}) \\ r_{i+1} = r_i / 2 \end{cases}$$

Traçando-se um gráfico log-log de $N_r(A)$ (número de caixas ocupadas) por r (tamanho do lado dessa caixa) obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α . Deste modo, é possível definir $D = -\alpha$ como Dimensão Fractal de A [7], [19].

3.4. Dividers (Compass)

O método Dividers [STOYAN et al. (1994)], também conhecido como Compass [10], é um dos métodos mais simples para estimar a Dimensão Fractal de objetos e curvas que possuam um contorno definido (membrana de célula, linha costeira...). Trata-se de um método exato apenas para curvas auto-semelhantes [11], [18], [19].

Ele é baseado no fato do perímetro de um fractal ser proporcional ao tamanho de uma régua r usada para medir o seu contorno.

Partindo-se da relação

$$l(r) = \mu \cdot r^{1-D}$$

onde $l(r)$ é o comprimento do perímetro de uma forma medido utilizando-se uma régua de tamanho r. Desse modo, é possível calcular a Dimensão Fractal (D) como sendo

$$D = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(l(r))}{\ln(r)}$$

Traçando o gráfico log-log de $l(r)$ (comprimento do perímetro para uma régua r) por r (tamanho da régua) obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = 1 - \alpha$ é Dimensão Fractal de P [10].

3.5. Bouligand-Minkowski

O método de Bouligand-Minkowski ou Dimensão de Minkowski é um dos métodos que produz os resultados mais acurados e consistentes para Dimensão Fractal

[19]. Isso se deve à sua alta sensibilidade às pequenas variações estruturais que uma forma pode vir a possuir.

O método se baseia no estudo da área de influência criada pela dilatação da forma em questão por um disco de raio r . Pequenas alterações na forma geram alterações na área de influência calculada [15] [19].

A área de influência de A , $A(r)$, pode ser obtida por meio da aplicação de dilatações em A , de modo que

$$A(r) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

onde $B_r(x)$ é um disco de raio r .

Para obter a Dimensão de Minkowski, um disco de raio r é varrido ao longo dos pixels da extremidade da forma, sendo que os centros dos discos correspondem às coordenadas da extremidade da forma. Os pontos limitados pelo círculo são então somados, fornecendo a área dilatada $A(r)$ da imagem, para um raio r [13]. A partir dos dados sobre a área dilatada, $A(r)$, e o raio, r , pode-se estabelecer a relação

$$A(r) = \mu \cdot r^{2-D}$$

onde a Dimensão Fractal (D) calculada pelo Método de Minkowski é obtida como sendo

$$D = 2 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(A(r))}{\ln(r)}$$

Traçando-se um gráfico log-log de $A(r)$ (área de influência para um raio r) por r (tamanho do raio de influência), obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = 2 - \alpha$ é Dimensão Fractal de A pelo método de Minkowski.

Esse método ainda possibilita calcular a Dimensão Fractal por meio da análise da Derivada da curva log-log obtida. No entanto neste caso é necessário realizar a suavização da curva através da convolução com uma Gaussiana [1].

4. Experimento

Para validar a eficiência dos diversos métodos de estimativa da Dimensão Fractal descritos anteriormente, realizou-se um experimento onde a Dimensão Fractal de diversas formas foi estimada por cada um dos métodos apresentados.

Para a realização desse experimento, utilizaram-se formas fractais e outras formas Euclidianas de dimensão já conhecida.

A Tabela 1 mostra as formas euclidianas utilizadas, enquanto que a Tabela 2 mostra as formas fractais que foram selecionadas para o experimento.

Objeto	Dimensão
Quadrado	2
Reta	1
Ponto	0

Tabela 1 – Formas Euclidianas

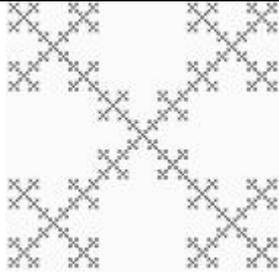
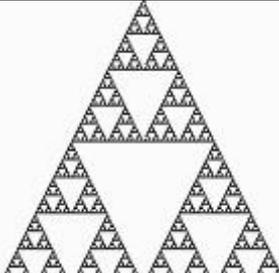
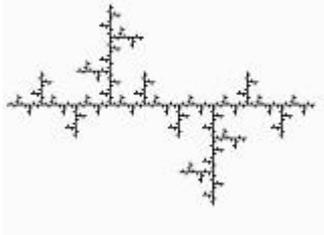
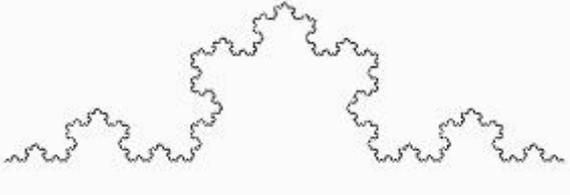
 <p>Nome: Box Dimensão Fractal: 1.4649</p>
 <p>Nome: Triângulo de Sierpinski Dimensão Fractal: 1.5850</p>
 <p>Nome: TreeLike Dimensão Fractal: 1.465</p>
 <p>Nome: Curva de Koch Dimensão Fractal: 1.262</p>

Tabela 2 – Formas Fractais

5. Análise dos Resultados

Partindo-se da definição de cada método anteriormente citado, conclui-se que nem todos os métodos podem ser aplicados de forma satisfatória a todas as formas selecionadas para o experimento. No entanto, alguns métodos podem ser aplicados a qualquer forma, desde que respeitadas certas restrições quanto à sua utilização.

Os diversos métodos descritos anteriormente foram utilizados conforme as configurações da Tabela 3.

Os resultados obtidos foram divididos em 3 tabelas: a Tabela 4 contém os resultados obtidos para as formas euclidianas, enquanto que as Tabelas 5 e 6 contém os resultados para as formas fractais analisadas.

A partir dos resultados obtidos com o experimento podem-se concluir quais métodos apresentam melhores resultados para cada tipo de forma, e quais os métodos que possuem maior invariância à rotação.

O método Dividers mostrou-se incapaz de estimar a Dimensão Fractal da maioria das formas selecionadas devido à sua própria definição. Por se basear no contorno externo, formas que possuíam informação interna (como o triângulo de Sierpinski) ou um contorno indefinido (como o TreeLike) não puderam ser classificados por este método. No entanto ele mostrou-se eficiente para formas como uma reta e a curva de Koch (curvas abertas em geral) em suas diversas configurações utilizadas.

O quadrado foi outra forma em que o Dividers mostrou-se ineficiente. Isso ocorre por que o Dividers trabalha sobre o quadrado da mesma maneira que sobre uma curva fechada, ou seja, não existe um ponto inicial para o método. Uma solução para esse problema é escolher diversos pontos de início e trabalhar com a média gerada pelas diversas iterações do método. No entanto essa solução acaba gerando uma variação muito alta nos resultados.

Por se trabalhar num espaço discreto, a rotação produz fragmentação dos contornos das formas onde o Dividers anteriormente pode ser aplicado com sucesso, impedindo na maioria das vezes a sua aplicação em estruturas que sofreram uma rotação.

O método de Intersecções Acumulativas também se mostrou falho para a grande maioria das formas analisadas, apresentado muitas vezes valores diferentes dos esperados.

O maior problema encontrado para esse método diz respeito ao centro de massa da forma. Alguns centros de massa calculados eram pontos referentes ao fundo e não a forma, o que levava a resultados muito diferentes do esperado (como é o caso do Triângulo de Sierpinski, a

Curva de Koch). Uma solução para esse problema é a utilização de vários centros para o cálculo de diversas iterações, e tomando a média dessas iterações como a Dimensão Fractal calculada. Essa solução gera resultados melhores, mas ainda longe dos resultados esperados devido a uma alta margem de variabilidade que o método ainda apresenta.

Já com relação à rotação, o método obteve resultados um pouco acima dos calculados anteriormente (sendo a única exceção o quadrado), mas mantendo a mesma taxa de variabilidade.

ID	Configuração do Método
A	BoxCounting: Grid Sobreposto
B	BoxCounting: Grid Ajustado para menor contagem
C	Dividers: Cálculo do Menor Perímetro no Sentido Horário
D	Dividers: Cálculo do Menor Perímetro no Sentido Anti-Horário
E	Dividers: Cálculo do Total de Rulers utilizados no Sentido Horário
F	Dividers: Cálculo do Total de Rulers utilizados no Sentido Anti-Horário
G	MassaRaio: Utilizando o Centro de Massa e Raio de Giro
H	MassaRaio: Utilizando o vários círculos e raio variável
I	Intersecções Acumulativas: Utilizando o Centro de Massa e Raio de Giro
J	Intersecções Acumulativas: Utilizando vários círculos e raio variável
K	Minkowski: Utilizando raio = 20
L	Minkowski: Utilizando raio = 30
M	Minkowski: Utilizando raio = 40
N	Pico da Derivada de Minkowski: Utilizando raio = 100 e Sigma =10
O	Pico da Derivada de Minkowski: Utilizando raio = 100 e Sigma =15
P	Pico da Derivada de Minkowski: Utilizando raio = 100 e Sigma =20

Tabela 3 – Configurações dos Métodos

ID	Ponto	Reta		Quadrado	
	DF= 0	DF= 1	Rotação	DF= 2	Rotação
A	0	0,9996	1,0123 ± 0,0195	1,9999	1,8866 ± 0,0755
B	0	0,9996	0,9999 ± 0,009	1,9999	1,8906 ± 0,0729
C	-	1	1,0006 ± 0,0006	1,3838 ± 0,1702	1,4072 ± 0,1303
D	-	1	1,0006 ± 0,0006	1,4001 ± 0,1484	1,4042 ± 0,1396
E	-	1,0382	1,0459 ± 0,0178	1,1004 ± 0,0175	1,1027 ± 0,0291
F	-	1,0382	1,0457 ± 0,018	1,1046 ± 0,0168	1,1001 ± 0,0285
G	-	0,957	0,9804 ± 0,0036	1,8509	1,8596 ± 0,0063
H	-	0,8849 ± 0,0171	0,9335 ± 0,0136	1,8178 ± 0,0194	1,8129 ± 0,0219
I	-	0,9998	1,0768 ± 0,0535	7,8109	6,3767 ± 1,5244
J	-	0,9382 ± 0,0341	1,0781 ± 0,0997	2,0975 ± 0,5231	2,0374 ± 0,5240
K	0,0694	0,9891	1,0018 ± 0,0112	1,7802	1,7796 ± 0,0003
L	0,0446	0,9462	0,9583 ± 0,0095	1,6974	1,6975 ± 0,0001
M	0,0319	0,913	0,9240 ± 0,0082	1,6238	1,6244 ± 0,0005
N	0,1101	0,9799	0,9534 ± 0,0177	1,7352	1,7109 ± 0,0162
O	0,0783	0,9314	0,9319 ± 0,0048	1,6745	1,6748 ± 0,0027
P	0,0646	0,9214	0,9214 ± 0,0066	1,6546	1,6616 ± 0,0048

Tabela 4 – Resultados para as formas euclidianas

ID	Box	DF= 1,4649	Sierpinski	DF= 1,585
		Rotação		Rotação
A	1,4997	1,4221 ± 0,0517	1,5832	1,5701 ± 0,0111
B	1,4913	1,4118 ± 0,0530	1,5846	1,5682 ± 0,0144
C	-	-	-	-
D	-	-	-	-
E	-	-	-	-
F	-	-	-	-
G	1,4929	1,4724 ± 0,0137	2,301	2,3067 ± 0,2028
H	1,4394 ± 0,0277	1,3746 ± 0,0545	1,4947 ± 0,0276	1,4929 ± 0,0205
I	1,4662	1,4870 ± 0,0631	2,4442	2,5078 ± 0,1010
J	1,5184 ± 0,0569	1,6247 ± 0,1180	1,5788 ± 0,0438	1,6402 ± 0,0553
K	1,3997	1,4006 ± 0,0024	1,5653	1,5664 ± 0,0013
L	1,4138	1,4105 ± 0,0086	1,5461	1,5472 ± 0,0010
M	1,4071	1,4073 ± 0,0010	1,5231	1,5243 ± 0,0009
N	1,5098	1,5084 ± 0,0017	1,5423	1,5427 ± 0,0007
O	1,5023	1,5023 ± 0,0014	1,5371	1,5371 ± 0,0014
P	1,495	1,4953 ± 0,0012	1,5329	1,5336 ± 0,0013

Tabela 5 – Resultados para as formas fractais Box e Triângulo de Sierpinski

ID	Koch	DF= 1,262	TreeLike	DF= 1,465
		Rotação		Rotação
A	1,2348	1,2805 ± 0,0071	1,3558	1,3794 ± 0,0206
B	1,2273	1,2721 ± 0,0033	1,3508	1,3804 ± 0,0257
C	1,2198	-	-	-
D	1,2164	-	-	-
E	1,222	-	-	-
F	1,2175	-	-	-
G	1,5247	1,4875 ± 0,1045	1,3962	1,4040 ± 0,0212
H	1,1954 ± 0,0198	1,2003 ± 0,0253	1,3164 ± 0,0358	1,3392 ± 0,0328
I	1,6763	1,6975 ± 0,0268	1,3458	1,4353 ± 0,0762
J	1,3890 ± 0,0917	1,3955 ± 0,0619	1,3584 ± 0,0405	1,5620 ± 1,1731
K	1,2753	1,2787 ± 0,0033	1,3702	1,3732 ± 0,0035
L	1,2604	1,2632 ± 0,0026	1,3558	1,3580 ± 0,0026
M	1,2502	1,2528 ± 0,0021	1,3287	1,3307 ± 0,0023
N	1,2734	1,2741 ± 0,0008	1,3847	1,3867 ± 0,0019
O	1,2609	1,2625 ± 0,0017	1,3796	1,3810 ± 0,0016
P	1,2563	1,2578 ± 0,0017	1,3749	1,3761 ± 0,0015

Tabela 6 - Resultados para as formas fractais Koch e TreeLike

O método Massa-Raio, ao contrário do método Dividers, tem a restrição de não ser eficaz quando se tem em mãos apenas o contorno de determinada estrutura. Isso ocorre porque apenas com o contorno de um objeto, não se possui nenhuma informação com relação à massa interna do mesmo. Além disso, esse método apresenta o mesmo problema para o cálculo de centro de massa que o método de Intersecções Acumulativas apresenta, sendo a mesma solução apresentada para o método de Intersecções Acumulativas utilizada aqui.

De modo geral esse método apresenta resultados satisfatórios e com uma variabilidade mediana, desde que observadas as restrições acima citadas. Já no caso de se trabalhar com formas que sofreram rotação o método produz resultados semelhantes aos calculados anteriormente, mantendo também o mesmo nível de variação obtido anteriormente, o que garante esse a esse método uma boa taxa de invariância a rotação com relação às estruturas analisadas.

O método do BoxCounting não apresenta problemas com relação aos tipos de estruturas em que pode ser aplicado. No entanto, devem ser observadas certas restrições impostas durante a sua aplicação para garantir a qualidade dos resultados.

Uma dessas restrições se deve ao alinhamento do grid utilizado na contagem com a estrutura, de modo a minimizar a contagem de caixas. Além disso, o conjunto de caixas utilizados tem influência direta na contagem obtida, sendo por isso utilizada a caixa inicial como o

tamanho máximo da estrutura analisada, sendo a caixa seguinte sempre a metade da anterior.

Seguindo estas restrições, o método do BoxCounting apresentou resultados muito próximos dos esperados, sem que esses resultados variassem de uma iteração para a outra.

Já na rotação, alguns resultados tiveram uma pequena tendência de se afastarem dos resultados anteriores. Isso ocorre devido à mudança no conjunto de caixas utilizado quando se altera a orientação espacial da estrutura analisada. No entanto, como foi utilizada uma regra para a escolha dessas caixas o resultado ainda se manteve consistente, e apresentou uma variação muito pequena.

O método de Bouligand-Minkowski é outro que também não apresenta problemas para a sua aplicação, sendo possível a sua aplicação a qualquer tipo de estrutura analisada. Além disso, diferente dos métodos anteriormente citados ele não necessita de ajustes iniciais para a sua aplicação, apresentando dessa forma resultados mais consistentes que os demais métodos, e sem variações.

Apesar de não necessitar de ajustes iniciais para a sua aplicação, percebe-se que o raio utilizado no cálculo tem uma certa influência no resultado final obtido. Raios menores apresentam resultados mais próximos do esperado, apresentando uma tendência a zero conforme o raio aumenta.

No caso da Derivada da curva log-log obtida pelo método de Minkowski o valor do raio utilizado não tem influência sobre o resultado, uma vez que o pico da derivada não varia conforme o raio utilizado. No entanto a Gaussiana utilizada na suavização da curva apresenta um parâmetro sigma que controla o nível de suavização da Derivada [1].

Esse método se mostra superior a todos os outros com relação à rotação, tanto quando se calcula a inclinação da curva ou o pico da sua derivada, apresentando resultados muito próximos dos anteriores, e com uma taxa de variação muito baixa.

Os resultados obtidos mostram que tanto o método BoxCounting quanto o de Minkowski são capazes de gerar resultados muito próximos do esperado. A fim de determinar qual dentre os dois é o melhor, foi realizado um segundo experimento entre os dois métodos onde fractais antes classificados tiveram um ruído adicionado a sua estrutura para ver qual a influência que esse ruído teria no cálculo da Dimensão Fractal. Esse ruído consistiu-se da adição de uma linha reta como prolongamento da estrutura fractal.

Os Fractais com ruído adicionado utilizados para esse novo experimento foram dispostos na Tabela 7.

Com esse novo experimento foram obtidos novos resultados. Tais resultados estão contidos na Tabela 8.

Apesar de ambos sofrerem uma alteração dos resultados devido ao ruído presente na estrutura, percebe-se que o método de Minkowski sofre menos perturbação durante o cálculo da Dimensão Fractal.

6. Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um experimento utilizando imagens de objetos euclidianos e fractais cuja Dimensão Fractal era conhecida. As imagens utilizadas foram submetidas a transformações de rotação e ruído, visando verificar a invariância à rotação e a susceptibilidade à ruídos.

Com base neste experimento, foi realizada uma análise comparativa das principais técnicas de estimativa da Dimensão Fractal, avaliando a precisão, detalhes de implementação, variação de resultados segundo ajustes de parâmetros e automação do método.

Dentre os métodos analisados no artigo, o BoxCounting e o Bouligand-Minkowski apresentam os melhores resultados, evidenciando a sua capacidade de aferir diferentes estruturas. O método de Bouligand-Minkowski apresentou os melhores resultados no estudo realizado, sendo invariante à rotação e possuindo boa tolerância a ruídos.

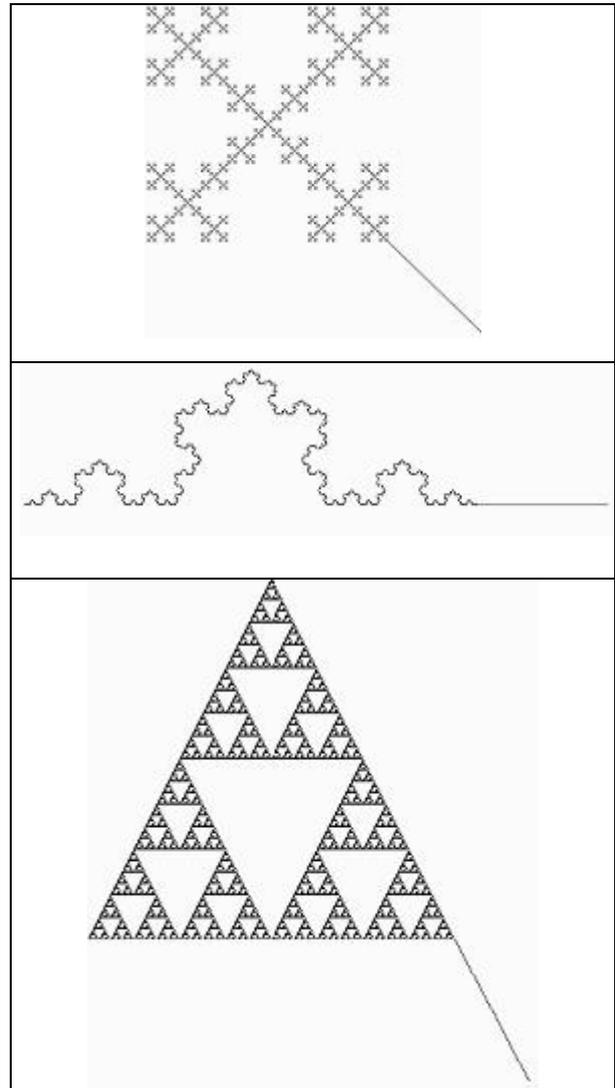


Tabela 7 – Formas Fractais com ruído adicionado

ID	Box com ruído	Koch com ruído	Sierpinski com ruído
	DF= 1,4649	DF= 1,262	DF= 1,585
A	1,427	1,2571	1,5055
B	1,411	1,2331	1,5152
K	1,3862	1,256	1,5436
L	1,3973	1,2394	1,5222
M	1,3892	1,2282	1,498
N	1,4874	1,2502	1,516
O	1,497	1,2379	1,5106
P	1,472	1,2318	1,5063

Tabela 8 - Resultados para os fractais com ruído

7. Bibliografia

- [1] Brigham, E. O. The Fast Fourier Transform, 2° Ed. New Jersey, Prentice Hall, 1998.
- [2] Bruno, O. M, Plotze, R. O; Falvo, M. FRACTAL DIMENSIONS APPLIED TO PLANT IDENTIFICATION (submetido para publicação na Pattern Recognition Letters), 2004.
- [3] Carlin, M. Measuring the complexity of non-fractal shapes by a fractal method. Pattern Recognition Letters 21 p.1013-1017, 2000.
- [4] CESAR, R. M. Jr, COSTA, L. F., Shape Analysis and Classification: Theory and Practice. Hardcover, 2000.
- [5] COELHO, R. C. & COSTA, L. da F. - "The Box-Counting Fractal". Dimension: Does it provide an Accurate Subsidy for Experimental Shape Characterization? If So, How to Use It?". Anais do Sibgrapi'95: p. 183-191, 1995.
- [6] Cornforth, D.; Jelinek, H. and Peichl, L., Fractop: a tool for automated biological image classification, 6th Australasia-Japan Joint Workshop, 2002.
- [7] Falconer, K.J. Fractal Geometry: mathematical and applications. New York, John Wiley, 1990.
- [8] Gulick, Denny, "Encounters with Chaos", McGraw-Hill International Editions – Mathematics and Statistics Series, 1992.
- [9] Kenkel, N.C. and D.J. Walker. Fractals and ecology. Abst. Bot. 17: 53-70, 1993.
- [10] Mandelbrot, Benoit B., "The Fractal Geometry of Nature" – 19th Edition, W.H. Freeman & Company, 2000.
- [11] Normant, F. and C. Tricot. Methods for evaluating the fractal dimension of curves using convex hulls. Phys. Rev. A 43: 6518-6525, 1991.
- [12] Schierwagen, A. "Scale-invariant diffusive growth: a dissipative principle relating neuronal form to function". In J. Maynard-Smith and G. Vida, editors, Organisational constraints on the dynamics of evolution, pp. 167-189, Manchester University Press, 1990.
- [13] SERRA, J. Image Analysis and Mathematical Morphology. London: Academic Press, 600 p, v.1. 1982.
- [14] Sholl, D. Dendritic organization in the neurons of the visual cortices of the cat. Journal of Anatomy, 87:387-406, 1953.
- [15] SHROEDER, M. Fractals, Chaos, Power Laws – Minutes from an infinite Paradise. New York, W. H. Freeman and Company, 1996.
- [16] Stoyan, D., Stoyan, H. Methods for the empirical determination of fractal dimension. In: Stoyan, D., Stoyan, H. (Eds.), Fractals, Random Shapes and Point Fields. Wiley, New York, pp. 39±45, 1994.
- [17] Sugihara, G. and R.M. May. Applications of fractals in ecology. Trends Ecol. Evol. 5: 79-86, 1990.
- [18] H. Takayasu, "Fractals in the Physical Sciences", Manchester University Press, Manchester and New York, 1990.
- [19] TRICOT, C. Curves and Fractal Dimension. New York: Springer-Verlag. 1995.